Operadores y Funcionales Lineales Continuos

Universidad de Granada
Departamento de Análisis Matemático

Proposición. Sean X e Y espacios normados sobre $\mathbb{K}$ y $T : X \to Y$ una aplicación lineal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

Proposición. Sean X e Y espacios normados sobre $\mathbb{K}$ y $T : X \to Y$ una aplicación lineal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. Existe un número $M \geqslant 0$ tal que $\|Tx\| \leqslant M\|x\|$ para todo $x \in X$.

Proposición. Sean X e Y espacios normados sobre $\mathbb{K}$ y $T : X \to Y$ una aplicación lineal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. Existe un número $M \geqslant 0$ tal que $\|Tx\| \leqslant M\|x\|$ para todo $x \in X$.
2. T es una aplicación lipchiciana, es decir, existe un número $M \geqslant 0$ tal que

$$\|Tx - Ty\| \leqslant M\|x - y\| \quad (x, y \in X)$$

Proposición. Sean X e Y espacios normados sobre $\mathbb{K}$ y $T : X \to Y$ una aplicación lineal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. Existe un número $M \geqslant 0$ tal que $\|Tx\| \leqslant M\|x\|$ para todo $x \in X$.
2. T es una aplicación lipchiciana, es decir, existe un número $M \geqslant 0$ tal que
$$\|Tx - Ty\| \leqslant M\|x - y\| \quad (x, y \in X)$$
3. T es uniformemente continua en X.

Proposición. Sean X e Y espacios normados sobre $\mathbb{K}$ y $T : X \to Y$ una aplicación lineal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. Existe un número $M \geqslant 0$ tal que $\|Tx\| \leqslant M\|x\|$ para todo $x \in X$.
2. T es una aplicación lipchiciana, es decir, existe un número $M \geqslant 0$ tal que

$$\|Tx - Ty\| \leqslant M\|x - y\| \quad (x, y \in X)$$

3. T es uniformemente continua en X.
4. T es continua.

Proposición. Sean X e Y espacios normados sobre $\mathbb{K}$ y $T : X \to Y$ una aplicación lineal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. Existe un número $M \geqslant 0$ tal que $\|Tx\| \leqslant M\|x\|$ para todo $x \in X$.
2. T es una aplicación lipchiciana, es decir, existe un número $M \geqslant 0$ tal que
$$\|Tx - Ty\| \leqslant M\|x - y\| \quad (x, y \in X)$$
3. T es uniformemente continua en X.
4. T es continua.
5. T es continua en 0.

Proposición. Sean X e Y espacios normados sobre $\mathbb{K}$ y $T : X \to Y$ una aplicación lineal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. Existe un número $M \geqslant 0$ tal que $\|Tx\| \leqslant M\|x\|$ para todo $x \in X$.
2. T es una aplicación lipchiciana, es decir, existe un número $M \geqslant 0$ tal que
$$\|Tx - Ty\| \leqslant M\|x - y\| \quad (x, y \in X)$$
3. T es uniformemente continua en X.
4. T es continua.
5. T es continua en 0.
6. La imagen por T de todo conjunto acotado en X es un conjunto acotado en Y.

Proposición. Sean X e Y espacios normados sobre $\mathbb{K}$ y $T : X \to Y$ una aplicación lineal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. Existe un número $M \geqslant 0$ tal que $\|Tx\| \leqslant M\|x\|$ para todo $x \in X$.
2. T es una aplicación lipchiciana, es decir, existe un número $M \geqslant 0$ tal que
$$\|Tx - Ty\| \leqslant M\|x - y\| \quad (x, y \in X)$$
3. T es uniformemente continua en X.
4. T es continua.
5. T es continua en 0.
6. La imagen por T de todo conjunto acotado en X es un conjunto acotado en Y.
7. La imagen por T de la bola unidad cerrada de X es un conjunto acotado en Y.

Dados dos espacios normados X e Y sobre el mismo cuerpo, representaremos por $L(X,Y)$ el espacio vectorial de todos los operadores lineales y continuos de X en Y. Representaremos por $L(X)$ el espacio $L(X,X)$.

Dados dos espacios normados X e Y sobre el mismo cuerpo, representaremos por $L(X,Y)$ el espacio vectorial de todos los operadores lineales y continuos de X en Y. Representaremos por $L(X)$ el espacio $L(X,X)$.

Proposición. Sean X e Y espacios normados.

1. La aplicación $T \to \|T\|$ definida por:

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leqslant 1\} \qquad (T \in L(X,Y))$$

   es una norma en $L(X,Y)$. Dicha norma se llama **norma de operadores**.

Dados dos espacios normados X e Y sobre el mismo cuerpo, representaremos por $L(X,Y)$ el espacio vectorial de todos los operadores lineales y continuos de X en Y. Representaremos por $L(X)$ el espacio $L(X,X)$.

Proposición. Sean X e Y espacios normados.

1. La aplicación $T \to \|T\|$ definida por:

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leqslant 1\} \qquad (T \in L(X,Y))$$

   es una norma en $L(X,Y)$. Dicha norma se llama **norma de operadores**.

2. Se verifican las siguientes igualdades:

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\} = \sup\{\|Tx\| : \|x\| < 1\} =$$
$$= \sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \in X, x \neq 0\right\} = \min\{M \geqslant 0 : \|Tx\| \leqslant M\|x\| \ \ \forall x \in X\}$$

   En particular, para todo $x \in X$ se verifica la desigualdad $\|Tx\| \leqslant \|T\|\|x\|$, y $\|T\|$ es la mínima constante que verifica una desigualdad de ese tipo.

Dados dos espacios normados X e Y sobre el mismo cuerpo, representaremos por $L(X,Y)$ el espacio vectorial de todos los operadores lineales y continuos de X en Y. Representaremos por $L(X)$ el espacio $L(X,X)$.

Proposición. Sean X e Y espacios normados.

1. La aplicación $T \to \|T\|$ definida por:
$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leqslant 1\} \qquad (T \in L(X,Y))$$
es una norma en $L(X,Y)$. Dicha norma se llama **norma de operadores**.
2. Se verifican las siguientes igualdades:
$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\} = \sup\{\|Tx\| : \|x\| < 1\} =$$
$$= \sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \in X, x \neq 0\right\} = \text{mín}\{M \geqslant 0 : \|Tx\| \leqslant M\|x\| \;\; \forall x \in X\}$$
En particular, para todo $x \in X$ se verifica la desigualdad $\|Tx\| \leqslant \|T\|\|x\|$, y $\|T\|$ es la mínima constante que verifica una desigualdad de ese tipo.
3. La convergencia de una sucesión de operadores lineales, $\{T_n\}$, en $L(X,Y)$ equivale a la convergencia uniforme de dicha sucesión en todo subconjunto acotado de X.

Dados dos espacios normados X e Y sobre el mismo cuerpo, representaremos por $L(X,Y)$ el espacio vectorial de todos los operadores lineales y continuos de X en Y. Representaremos por $L(X)$ el espacio $L(X,X)$.

Proposición. Sean X e Y espacios normados.

1. La aplicación $T \to \|T\|$ definida por:

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leqslant 1\} \qquad (T \in L(X,Y))$$

es una norma en $L(X,Y)$. Dicha norma se llama **norma de operadores**.

2. Se verifican las siguientes igualdades:

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\} = \sup\{\|Tx\| : \|x\| < 1\} =$$
$$= \sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \in X, x \neq 0\right\} = \min\{M \geqslant 0 : \|Tx\| \leqslant M\|x\| \;\; \forall x \in X\}$$

En particular, para todo $x \in X$ se verifica la desigualdad $\|Tx\| \leqslant \|T\|\|x\|$, y $\|T\|$ es la mínima constante que verifica una desigualdad de ese tipo.

3. La convergencia de una sucesión de operadores lineales, $\{T_n\}$, en $L(X,Y)$ equivale a la convergencia uniforme de dicha sucesión en todo subconjunto acotado de X.

4. Si el espacio Y es de Banach entonces $L(X,Y)$ también es de Banach.

Dados dos espacios normados X e Y sobre el mismo cuerpo, representaremos por $L(X,Y)$ el espacio vectorial de todos los operadores lineales y continuos de X en Y. Representaremos por $L(X)$ el espacio $L(X,X)$.

Proposición. Sean X e Y espacios normados.

1. La aplicación $T \to \|T\|$ definida por:

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leqslant 1\} \qquad (T \in L(X,Y))$$

es una norma en $L(X,Y)$. Dicha norma se llama **norma de operadores**.

2. Se verifican las siguientes igualdades:

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\} = \sup\{\|Tx\| : \|x\| < 1\} =$$
$$= \sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \in X, x \neq 0\right\} = \min\{M \geqslant 0 : \|Tx\| \leqslant M\|x\| \;\; \forall x \in X\}$$

En particular, para todo $x \in X$ se verifica la desigualdad $\|Tx\| \leqslant \|T\|\|x\|$, y $\|T\|$ es la mínima constante que verifica una desigualdad de ese tipo.

3. La convergencia de una sucesión de operadores lineales, $\{T_n\}$, en $L(X,Y)$ equivale a la convergencia uniforme de dicha sucesión en todo subconjunto acotado de X.
4. Si el espacio Y es de Banach entonces $L(X,Y)$ también es de Banach.
5. Si Z es otro espacio normado, $T \in L(X,Y)$ y $S \in L(Y,Z)$, se verifica que

$$\|S \circ T\| \leqslant \|S\|\|T\|$$

La norma de un operador tiene una sencilla interpretación geométrica, $\|T\|$ es el radio de la más pequeña bola cerrada centrada en 0 que contiene a $T(B_X)$.

La norma de un operador tiene una sencilla interpretación geométrica, $\|T\|$ es el radio de la más pequeña bola cerrada centrada en 0 que contiene a $T(B_X)$.

El espacio $L(X,Y)$ lo consideraremos siempre como un espacio normado con la norma de operadores.

La norma de un operador tiene una sencilla interpretación geométrica, $\|T\|$ es el radio de la más pequeña bola cerrada centrada en 0 que contiene a $T(B_X)$.

El espacio $L(X,Y)$ lo consideraremos siempre como un espacio normado con la norma de operadores.*Observa que dicha norma depende de las normas que tengamos en X y en Y.*

La norma de un operador tiene una sencilla interpretación geométrica, $\|T\|$ es el radio de la más pequeña bola cerrada centrada en 0 que contiene a $T(B_X)$.

El espacio $L(X,Y)$ lo consideraremos siempre como un espacio normado con la norma de operadores.*Observa que dicha norma depende de las normas que tengamos en X y en Y.*

En este curso es fundamental que aprendas a trabajar con la norma de operadores, para ello es esencial que pongas cada norma en donde corresponda y eso no lo podrás hacer si no eres cuidadoso con la notación.

La norma de un operador tiene una sencilla interpretación geométrica, $\|T\|$ es el radio de la más pequeña bola cerrada centrada en 0 que contiene a $T(B_X)$.

El espacio $L(X, Y)$ lo consideraremos siempre como un espacio normado con la norma de operadores.*Observa que dicha norma depende de las normas que tengamos en X y en Y.*

En este curso es fundamental que aprendas a trabajar con la norma de operadores, para ello es esencial que pongas cada norma en donde corresponda y eso no lo podrás hacer si no eres cuidadoso con la notación. Con un ejemplo entenderás mejor lo que quiero decir. ¿Cuántas normas hay en la expresión siguiente?

$$\|(S\circ T)x\| = \|S(Tx)\| \leqslant \|S\|\|Tx\| \leqslant \|S\|\|T\|\|x\| \implies \|S\circ T\| \leqslant \|S\|\|T\| \tag{1}$$

Una aplicación $T\in L(X, Y)$ que es biyectiva y cuya inversa es continua diremos que es un **isomorfismo topológico**. Si una tal aplicación existe se dice que X e Y son **topológicamente isomorfos**.

La norma de un operador tiene una sencilla interpretación geométrica, $\|T\|$ es el radio de la más pequeña bola cerrada centrada en 0 que contiene a $T(B_X)$.

El espacio $L(X,Y)$ lo consideraremos siempre como un espacio normado con la norma de operadores.*Observa que dicha norma depende de las normas que tengamos en X y en Y.*

En este curso es fundamental que aprendas a trabajar con la norma de operadores, para ello es esencial que pongas cada norma en donde corresponda y eso no lo podrás hacer si no eres cuidadoso con la notación. Con un ejemplo entenderás mejor lo que quiero decir. ¿Cuántas normas hay en la expresión siguiente?

$$\|(S\circ T)x\| = \|S(Tx)\| \leqslant \|S\|\|Tx\| \leqslant \|S\|\|T\|\|x\| \implies \|S\circ T\| \leqslant \|S\|\|T\| \qquad (1)$$

Una aplicación $T\in L(X,Y)$ que es biyectiva y cuya inversa es continua diremos que es un **isomorfismo topológico**. Si una tal aplicación existe se dice que X e Y son **topológicamente isomorfos**.Una aplicación $T\in L(X,Y)$ que es biyectiva y conserva las normas, esto es, $\|Tx\| = \|x\|$ para todo $x\in X$, diremos que es un **isomorfismo isométrico**. Cuando una tal aplicación existe se dice que X e Y son **isométricamente isomorfos**.

La norma de un operador tiene una sencilla interpretación geométrica, $\|T\|$ es el radio de la más pequeña bola cerrada centrada en 0 que contiene a $T(B_X)$.

El espacio $L(X,Y)$ lo consideraremos siempre como un espacio normado con la norma de operadores.*Observa que dicha norma depende de las normas que tengamos en X y en Y.*

En este curso es fundamental que aprendas a trabajar con la norma de operadores, para ello es esencial que pongas cada norma en donde corresponda y eso no lo podrás hacer si no eres cuidadoso con la notación. Con un ejemplo entenderás mejor lo que quiero decir. ¿Cuántas normas hay en la expresión siguiente?

$$\|(S\circ T)x\| = \|S(Tx)\| \leqslant \|S\|\|Tx\| \leqslant \|S\|\|T\|\|x\| \implies \|S\circ T\| \leqslant \|S\|\|T\| \qquad (1)$$

Una aplicación $T\in L(X,Y)$ que es biyectiva y cuya inversa es continua diremos que es un **isomorfismo topológico**. Si una tal aplicación existe se dice que X e Y son **topológicamente isomorfos**.Una aplicación $T\in L(X,Y)$ que es biyectiva y conserva las normas, esto es, $\|Tx\| = \|x\|$ para todo $x\in X$, diremos que es un **isomorfismo isométrico**. Cuando una tal aplicación existe se dice que X e Y son **isométricamente isomorfos**.Dos espacios normados isométricamente isomorfos tendrán las mismas propiedades como espacios normados, por lo que son indistinguibles en cuanto a su estructura de espacios normados. Es decir, un isomorfismo isométrico es la identificación total entre espacios normados. Escribiremos $X\equiv Y$ para indicar que X e Y son isométricamente isomorfos.

Diremos que un operador lineal $T : X \to Y$ de un espacio normado X en un espacio normado Y está **acotado inferiormente** si existe $m > 0$ tal que $\|Tx\| \geqslant m\|x\|$ para todo $x \in X$.

Diremos que un operador lineal $T : X \to Y$ de un espacio normado X en un espacio normado Y está **acotado inferiormente** si existe $m > 0$ tal que $\|Tx\| \geqslant m\|x\|$ para todo $x \in X$.

Proposición. Sean X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $T \in L(X, Y)$. Supongamos que T está acotado inferiormente. Entonces T es un isomorfismo topológico de X sobre $T(X)$. En consecuencia $T(X)$ es completo y, por tanto, cerrado en Y.

Diremos que un operador lineal $T : X \to Y$ de un espacio normado X en un espacio normado Y está **acotado inferiormente** si existe $m > 0$ tal que $\|Tx\| \geqslant m\|x\|$ para todo $x \in X$.

Proposición. Sean X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $T \in L(X, Y)$. Supongamos que T está acotado inferiormente. Entonces T es un isomorfismo topológico de X sobre $T(X)$. En consecuencia $T(X)$ es completo y, por tanto, cerrado en Y.

Proposición. Sea X un espacio normado e Y un espacio de Banach, M un subespacio de X y $T \in L(M, Y)$. Entonces existe una única $\widetilde{T} \in Lin(\overline{M}, Y)$ que es una extensión de T. Además $\|T\| = \|\widetilde{T}\|$ y si T es isométrica también $\widetilde{T}$ es isométrica.

Diremos que un operador lineal $T : X \to Y$ de un espacio normado X en un espacio normado Y está **acotado inferiormente** si existe $m > 0$ tal que $\|Tx\| \geqslant m\|x\|$ para todo $x \in X$.

Proposición. Sean X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $T \in L(X, Y)$. Supongamos que T está acotado inferiormente. Entonces T es un isomorfismo topológico de X sobre $T(X)$. En consecuencia $T(X)$ es completo y, por tanto, cerrado en Y.

Proposición. Sea X un espacio normado e Y un espacio de Banach, M un subespacio de X y $T \in L(M, Y)$. Entonces existe una única $\widetilde{T} \in Lin(\overline{M}, Y)$ que es una extensión de T. Además $\|T\| = \|\widetilde{T}\|$ y si T es isométrica también $\widetilde{T}$ es isométrica.

Recuerda que el espacio de todos los funcionales lineales, o formas lineales, sobre un espacio vectorial X se llama el *dual algebraico* de X y suele representarse por $X^\sharp$. Una evidencia que conviene no olvidar es que toda forma lineal no nula es sobreyectiva.

Diremos que un operador lineal $T : X \to Y$ de un espacio normado X en un espacio normado Y está **acotado inferiormente** si existe $m > 0$ tal que $\|Tx\| \geqslant m\|x\|$ para todo $x \in X$.

Proposición. Sean X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $T \in L(X, Y)$. Supongamos que T está acotado inferiormente. Entonces T es un isomorfismo topológico de X sobre $T(X)$. En consecuencia $T(X)$ es completo y, por tanto, cerrado en Y.

Proposición. Sea X un espacio normado e Y un espacio de Banach, M un subespacio de X y $T \in L(M, Y)$. Entonces existe una única $\widetilde{T} \in Lin(\overline{M}, Y)$ que es una extensión de T. Además $\|T\| = \|\widetilde{T}\|$ y si T es isométrica también $\widetilde{T}$ es isométrica.

Recuerda que el espacio de todos los funcionales lineales, o formas lineales, sobre un espacio vectorial X se llama el *dual algebraico* de X y suele representarse por $X^\sharp$. Una evidencia que conviene no olvidar es que toda forma lineal no nula es sobreyectiva.

Un hiperplano H es un subespacio vectorial maximal de X, es decir, H es un subespacio vectorial *propio* de X, y si V es un subespacio vectorial de X tal que $H \subset V \subset X$, entonces $H = V$ o $X = V$. Otra definición equivalente es que un hiperplano es un subespacio vectorial de codimensión 1.

- El núcleo de una forma lineal no nula es un hiperplano.

- El núcleo de una forma lineal no nula es un hiperplano.
- Todo hiperplano es el núcleo de alguna forma lineal no nula.

- El núcleo de una forma lineal no nula es un hiperplano.
- Todo hiperplano es el núcleo de alguna forma lineal no nula.
- Si dos formas lineales no nulas tienen el mismo núcleo, entonces cada una de ellas es un múltiplo escalar de la otra.

- El núcleo de una forma lineal no nula es un hiperplano.
- Todo hiperplano es el núcleo de alguna forma lineal no nula.
- Si dos formas lineales no nulas tienen el mismo núcleo, entonces cada una de ellas es un múltiplo escalar de la otra.
- Las formas lineales son aplicaciones abiertas.

- El núcleo de una forma lineal no nula es un hiperplano.
- Todo hiperplano es el núcleo de alguna forma lineal no nula.
- Si dos formas lineales no nulas tienen el mismo núcleo, entonces cada una de ellas es un múltiplo escalar de la otra.
- Las formas lineales son aplicaciones abiertas.

- El núcleo de una forma lineal no nula es un hiperplano.
- Todo hiperplano es el núcleo de alguna forma lineal no nula.
- Si dos formas lineales no nulas tienen el mismo núcleo, entonces cada una de ellas es un múltiplo escalar de la otra.
- Las formas lineales son aplicaciones abiertas.

Cuando X es un espacio normado sobre $\mathbb{K}$ el espacio $L(X, \mathbb{K})$ de todos los funcionales lineales **continuos** sobre X se llama el **dual topológico** de X y se representa por X^*. En adelante, como no habrá lugar a confusión, nos referiremos a X^* como el **espacio dual** o, simplemente, el dual del espacio normado X.

- El núcleo de una forma lineal no nula es un hiperplano.
- Todo hiperplano es el núcleo de alguna forma lineal no nula.
- Si dos formas lineales no nulas tienen el mismo núcleo, entonces cada una de ellas es un múltiplo escalar de la otra.
- Las formas lineales son aplicaciones abiertas.

Cuando X es un espacio normado sobre $\mathbb{K}$ el espacio $L(X,\mathbb{K})$ de todos los funcionales lineales **continuos** sobre X se llama el **dual topológico** de X y se representa por X^*. En adelante, como no habrá lugar a confusión, nos referiremos a X^* como el **espacio dual** o, simplemente, el dual del espacio normado X.La norma de operadores en X^* se llama **norma dual** de la norma de X. Observa que X^* es siempre un espacio de Banach.

- El núcleo de una forma lineal no nula es un hiperplano.
- Todo hiperplano es el núcleo de alguna forma lineal no nula.
- Si dos formas lineales no nulas tienen el mismo núcleo, entonces cada una de ellas es un múltiplo escalar de la otra.
- Las formas lineales son aplicaciones abiertas.

Cuando X es un espacio normado sobre $\mathbb{K}$ el espacio $L(X,\mathbb{K})$ de todos los funcionales lineales **continuos** sobre X se llama el **dual topológico** de X y se representa por X^*. En adelante, como no habrá lugar a confusión, nos referiremos a X^* como el **espacio dual** o, simplemente, el dual del espacio normado X.La norma de operadores en X^* se llama **norma dual** de la norma de X. Observa que X^* es siempre un espacio de Banach.

Si H es un hiperplano de un espacio normado X, como $H \subset \overline{H} \subset X$ y $\overline{H}$ es un subespacio vectorial, debe ocurrir que o bien $H = \overline{H}$, es decir, H es cerrado, o bien $\overline{H} = X$, es decir H es denso. Luego, **todo hiperplano de un espacio normado X o es cerrado o es denso en X**.

Sea X un espacio normado. Se verifica que

Sea X un espacio normado. Se verifica que

- El núcleo de todo funcional lineal continuo no nulo es un hiperplano cerrado.

Sea X un espacio normado. Se verifica que

- El núcleo de todo funcional lineal continuo no nulo es un hiperplano cerrado.
- Si M un hiperplano cerrado y $u \in X \setminus M$. Entonces existe $g \in X^*$ verificando que $\ker(g) = M$, $\|g\| = 1$ y $g(u) = \mathrm{dist}(u, M)$.

Sea X un espacio normado. Se verifica que

- El núcleo de todo funcional lineal continuo no nulo es un hiperplano cerrado.
- Si M un hiperplano cerrado y $u \in X \setminus M$. Entonces existe $g \in X^*$ verificando que $\ker(g) = M$, $\|g\| = 1$ y $g(u) = \operatorname{dist}(u, M)$.
- Si $f : X \to \mathbb{K}$ es un funcional lineal discontinuo, entonces para toda bola abierta $B(a, r)$ se verifica que $f(B(a, r)) = \mathbb{K}$.

Sea X un espacio normado. Se verifica que

- El núcleo de todo funcional lineal continuo no nulo es un hiperplano cerrado.
- Si M un hiperplano cerrado y $u \in X \setminus M$. Entonces existe $g \in X^*$ verificando que $\ker(g) = M$, $\|g\| = 1$ y $g(u) = \mathrm{dist}(u, M)$.
- Si $f : X \to \mathbb{K}$ es un funcional lineal discontinuo, entonces para toda bola abierta $B(a, r)$ se verifica que $f(B(a, r)) = \mathbb{K}$.
- El núcleo de un funcional lineal discontinuo es un hiperplano denso.

Sea X un espacio normado. Se verifica que

- El núcleo de todo funcional lineal continuo no nulo es un hiperplano cerrado.
- Si M un hiperplano cerrado y $u \in X \setminus M$. Entonces existe $g \in X^*$ verificando que $\ker(g) = M$, $\|g\| = 1$ y $g(u) = \mathrm{dist}(u, M)$.
- Si $f : X \to \mathbb{K}$ es un funcional lineal discontinuo, entonces para toda bola abierta $B(a,r)$ se verifica que $f(B(a,r)) = \mathbb{K}$.
- El núcleo de un funcional lineal discontinuo es un hiperplano denso.
- Un funcional lineal no nulo, $f \in X^\sharp$, es continuo si, y sólo si, verifica alguna de las condiciones equivalentes

Sea X un espacio normado. Se verifica que

- El núcleo de todo funcional lineal continuo no nulo es un hiperplano cerrado.
- Si M un hiperplano cerrado y $u \in X \setminus M$. Entonces existe $g \in X^*$ verificando que $\ker(g) = M$, $\|g\| = 1$ y $g(u) = \text{dist}(u, M)$.
- Si $f : X \to \mathbb{K}$ es un funcional lineal discontinuo, entonces para toda bola abierta $B(a,r)$ se verifica que $f(B(a,r)) = \mathbb{K}$.
- El núcleo de un funcional lineal discontinuo es un hiperplano denso.
- Un funcional lineal no nulo, $f \in X^\sharp$, es continuo si, y sólo si, verifica alguna de las condiciones equivalentes
  - Su núcleo es cerrado.

Sea X un espacio normado. Se verifica que

- El núcleo de todo funcional lineal continuo no nulo es un hiperplano cerrado.
- Si M un hiperplano cerrado y $u \in X \setminus M$. Entonces existe $g \in X^*$ verificando que $\ker(g) = M$, $\|g\| = 1$ y $g(u) = \mathrm{dist}(u, M)$.
- Si $f : X \to \mathbb{K}$ es un funcional lineal discontinuo, entonces para toda bola abierta $B(a,r)$ se verifica que $f(B(a,r)) = \mathbb{K}$.
- El núcleo de un funcional lineal discontinuo es un hiperplano denso.
- Un funcional lineal no nulo, $f \in X^\sharp$, es continuo si, y sólo si, verifica alguna de las condiciones equivalentes
    - Su núcleo es cerrado.
    - f está acotada en alguna bola de radio positivo.

Sea X un espacio normado. Se verifica que

- El núcleo de todo funcional lineal continuo no nulo es un hiperplano cerrado.
- Si M un hiperplano cerrado y $u \in X \setminus M$. Entonces existe $g \in X^*$ verificando que $\ker(g) = M$, $\|g\| = 1$ y $g(u) = \mathrm{dist}(u, M)$.
- Si $f : X \to \mathbb{K}$ es un funcional lineal discontinuo, entonces para toda bola abierta $B(a, r)$ se verifica que $f(B(a, r)) = \mathbb{K}$.
- El núcleo de un funcional lineal discontinuo es un hiperplano denso.
- Un funcional lineal no nulo, $f \in X^\sharp$, es continuo si, y sólo si, verifica alguna de las condiciones equivalentes
    - Su núcleo es cerrado.
    - f está acotada en alguna bola de radio positivo.
    - La parte real de f, $\mathrm{Re} f$ está mayorada o minorada en alguna bola de radio positivo.

- Un **hiperplano afín**, V, en un espacio vectorial X es un trasladado de un hiperplano, es decir, es una variedad afín de la forma $V = a + H$ donde H es un hiperplano.

- Un **hiperplano afín**, V, en un espacio vectorial X es un trasladado de un hiperplano, es decir, es una variedad afín de la forma $V = a + H$ donde H es un hiperplano.
- Los hiperplanos afines son los conjuntos de la forma $\{x \in X : f(x) = \alpha\}$ donde $f : X \to \mathbb{K}$ es una forma lineal no nula y $\alpha \in \mathbb{K}$. Todo hiperplano afín que no pasa por el origen está determinado por una única forma lineal no nula.

- Un **hiperplano afín**, V, en un espacio vectorial X es un trasladado de un hiperplano, es decir, es una variedad afín de la forma $V = a + H$ donde H es un hiperplano.
- Los hiperplanos afines son los conjuntos de la forma $\{x \in X : f(x) = \alpha\}$ donde $f : X \to \mathbb{K}$ es una forma lineal no nula y $\alpha \in \mathbb{K}$. Todo hiperplano afín que no pasa por el origen está determinado por una única forma lineal no nula.
- Un hiperplano afín en un espacio normado es cerrado si, y sólo si, está determinado por una forma lineal continua.

- Un **hiperplano afín**, V, en un espacio vectorial X es un trasladado de un hiperplano, es decir, es una variedad afín de la forma $V = a + H$ donde H es un hiperplano.
- Los hiperplanos afines son los conjuntos de la forma $\{x \in X : f(x) = \alpha\}$ donde $f : X \to \mathbb{K}$ es una forma lineal no nula y $\alpha \in \mathbb{K}$. Todo hiperplano afín que no pasa por el origen está determinado por una única forma lineal no nula.
- Un hiperplano afín en un espacio normado es cerrado si, y sólo si, está determinado por una forma lineal continua.

- Un **hiperplano afín**, V, en un espacio vectorial X es un trasladado de un hiperplano, es decir, es una variedad afín de la forma $V = a + H$ donde H es un hiperplano.
- Los hiperplanos afines son los conjuntos de la forma $\{x \in X : f(x) = \alpha\}$ donde $f : X \to \mathbb{K}$ es una forma lineal no nula y $\alpha \in \mathbb{K}$. Todo hiperplano afín que no pasa por el origen está determinado por una única forma lineal no nula.
- Un hiperplano afín en un espacio normado es cerrado si, y sólo si, está determinado por una forma lineal continua.

El resultado siguiente generaliza la conocida fórmula que da la distancia de un punto a un plano en la geometría euclídea.

- Un **hiperplano afín**, V, en un espacio vectorial X es un trasladado de un hiperplano, es decir, es una variedad afín de la forma $V = a + H$ donde H es un hiperplano.
- Los hiperplanos afines son los conjuntos de la forma $\{x \in X : f(x) = \alpha\}$ donde $f : X \to \mathbb{K}$ es una forma lineal no nula y $\alpha \in \mathbb{K}$. Todo hiperplano afín que no pasa por el origen está determinado por una única forma lineal no nula.
- Un hiperplano afín en un espacio normado es cerrado si, y sólo si, está determinado por una forma lineal continua.

El resultado siguiente generaliza la conocida fórmula que da la distancia de un punto a un plano en la geometría euclídea.

Proposición. Sea X un espacio normado y sea $H = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$, donde $f \in X^*$, $f \neq 0$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, un hiperplano cerrado. Dado $z \notin H$ se tiene que

$$\mathrm{dist}(z, H) = \frac{|f(z) - \alpha|}{\|f\|}$$

Todo espacio vectorial complejo, X, también es un espacio vectorial real, al que para distinguirlo notaremos $X_{\mathbb{R}}$, y llamaremos **espacio vectorial real subyacente** a X, sin más que restringir a $\mathbb{R} \times X$ el producto por escalares que tenemos definido en $\mathbb{C} \times X$.

Todo espacio vectorial complejo, X, también es un espacio vectorial real, al que para distinguirlo notaremos $X_{\mathbb{R}}$, y llamaremos **espacio vectorial real subyacente** a X, sin más que restringir a $\mathbb{R} \times X$ el producto por escalares que tenemos definido en $\mathbb{C} \times X$. El siguiente resultado establece una relación entre los duales respectivos.

Todo espacio vectorial complejo, X, también es un espacio vectorial real, al que para distinguirlo notaremos $X_{\mathbb{R}}$, y llamaremos **espacio vectorial real subyacente** a X, sin más que restringir a $\mathbb{R} \times X$ el producto por escalares que tenemos definido en $\mathbb{C} \times X$. El siguiente resultado establece una relación entre los duales respectivos.

Proposición. Sea X un espacio vectorial complejo.

- La aplicación $\Phi : X^{\sharp} \to (X_{\mathbb{R}})^{\sharp}$ dada por $\Phi(f) = Ref$ es una biyección $\mathbb{R}$-lineal de $X^{\sharp}$ sobre $(X_{\mathbb{R}})^{\sharp}$ cuya inversa viene dada para toda $\varphi \in (X_{\mathbb{R}})^{\sharp}$ por $\Phi^{-1}(\varphi)(x) = \varphi(x) - i\varphi(ix)$ para todo $x \in X$.

Todo espacio vectorial complejo, X, también es un espacio vectorial real, al que para distinguirlo notaremos $X_{\mathbb{R}}$, y llamaremos **espacio vectorial real subyacente** a X, sin más que restringir a $\mathbb{R}\times X$ el producto por escalares que tenemos definido en $\mathbb{C}\times X$. El siguiente resultado establece una relación entre los duales respectivos.

Proposición. Sea X un espacio vectorial complejo.

- La aplicación $\Phi : X^{\sharp} \to (X_{\mathbb{R}})^{\sharp}$ dada por $\Phi(f) = Ref$ es una biyección $\mathbb{R}$-lineal de $X^{\sharp}$ sobre $(X_{\mathbb{R}})^{\sharp}$ cuya inversa viene dada para toda $\varphi \in (X_{\mathbb{R}})^{\sharp}$ por $\Phi^{-1}(\varphi)(x) = \varphi(x) - i\varphi(ix)$ para todo $x \in X$.
- Si X es un espacio normado la aplicación $\Phi : X^{*} \to (X_{\mathbb{R}})^{*}$ dada por $\Phi(f) = Ref$ es una biyección $\mathbb{R}$-lineal isométrica de X^{*} sobre $(X_{\mathbb{R}})^{*}$

Todo espacio vectorial complejo, X, también es un espacio vectorial real, al que para distinguirlo notaremos $X_{\mathbb{R}}$, y llamaremos **espacio vectorial real subyacente** a X, sin más que restringir a $\mathbb{R} \times X$ el producto por escalares que tenemos definido en $\mathbb{C} \times X$. El siguiente resultado establece una relación entre los duales respectivos.

Proposición. Sea X un espacio vectorial complejo.

- La aplicación $\Phi : X^\sharp \to (X_{\mathbb{R}})^\sharp$ dada por $\Phi(f) = Ref$ es una biyección $\mathbb{R}$-lineal de $X^\sharp$ sobre $(X_{\mathbb{R}})^\sharp$ cuya inversa viene dada para toda $\varphi \in (X_{\mathbb{R}})^\sharp$ por $\Phi^{-1}(\varphi)(x) = \varphi(x) - i\varphi(ix)$ para todo $x \in X$.
- Si X es un espacio normado la aplicación $\Phi : X^* \to (X_{\mathbb{R}})^*$ dada por $\Phi(f) = Ref$ es una biyección $\mathbb{R}$-lineal isométrica de X^* sobre $(X_{\mathbb{R}})^*$

Todo espacio vectorial complejo, X, también es un espacio vectorial real, al que para distinguirlo notaremos $X_{\mathbb{R}}$, y llamaremos **espacio vectorial real subyacente** a X, sin más que restringir a $\mathbb{R} \times X$ el producto por escalares que tenemos definido en $\mathbb{C} \times X$. El siguiente resultado establece una relación entre los duales respectivos.

Proposición. Sea X un espacio vectorial complejo.

- La aplicación $\Phi : X^{\sharp} \to (X_{\mathbb{R}})^{\sharp}$ dada por $\Phi(f) = Ref$ es una biyección $\mathbb{R}$-lineal de $X^{\sharp}$ sobre $(X_{\mathbb{R}})^{\sharp}$ cuya inversa viene dada para toda $\varphi \in (X_{\mathbb{R}})^{\sharp}$ por $\Phi^{-1}(\varphi)(x) = \varphi(x) - i\varphi(ix)$ para todo $x \in X$.
- Si X es un espacio normado la aplicación $\Phi : X^* \to (X_{\mathbb{R}})^*$ dada por $\Phi(f) = Ref$ es una biyección $\mathbb{R}$-lineal isométrica de X^* sobre $(X_{\mathbb{R}})^*$

Por tanto, **un funcional $\mathbb{C}$-lineal está determinado de manera única por su parte real que es un funcional $\mathbb{R}$-lineal**, dicho de otra forma, los funcionales $\mathbb{R}$-lineales son las partes reales de los funcionales $\mathbb{C}$-lineales y, para funcionales lineales continuos, un funcional lineal y su parte real tienen igual norma.

Todo espacio vectorial complejo, X, también es un espacio vectorial real, al que para distinguirlo notaremos $X_{\mathbb{R}}$, y llamaremos **espacio vectorial real subyacente** a X, sin más que restringir a $\mathbb{R} \times X$ el producto por escalares que tenemos definido en $\mathbb{C} \times X$. El siguiente resultado establece una relación entre los duales respectivos.

Proposición. Sea X un espacio vectorial complejo.

- La aplicación $\Phi : X^\sharp \to (X_{\mathbb{R}})^\sharp$ dada por $\Phi(f) = Ref$ es una biyección $\mathbb{R}$-lineal de $X^\sharp$ sobre $(X_{\mathbb{R}})^\sharp$ cuya inversa viene dada para toda $\varphi \in (X_{\mathbb{R}})^\sharp$ por $\Phi^{-1}(\varphi)(x) = \varphi(x) - i\varphi(ix)$ para todo $x \in X$.
- Si X es un espacio normado la aplicación $\Phi : X^* \to (X_{\mathbb{R}})^*$ dada por $\Phi(f) = Ref$ es una biyección $\mathbb{R}$-lineal isométrica de X^* sobre $(X_{\mathbb{R}})^*$

Por tanto, **un funcional $\mathbb{C}$-lineal está determinado de manera única por su parte real que es un funcional $\mathbb{R}$-lineal**, dicho de otra forma, los funcionales $\mathbb{R}$-lineales son las partes reales de los funcionales $\mathbb{C}$-lineales y, para funcionales lineales continuos, un funcional lineal y su parte real tienen igual norma.

Si X es un espacio vectorial complejo los hiperplanos afines en el espacio real subyacente $X_{\mathbb{R}}$ son las variedades afines de la forma $\{x \in X : \mathrm{Re} f(x) = \alpha\}$ donde $f \in X^\sharp$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

Proposición. Sean $p > 1$ y $q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Para cada $y \in \ell_q$ sea $\Phi y : \ell_p \to \mathbb{K}$ el funcional lineal definido por:

$$(\Phi y)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)y(n) \qquad (x \in \ell_p) \tag{2}$$

Se verifica entonces que $\Phi y \in \ell_p^*$, $\|\Phi y\| = \|y\|_q$, y la aplicación $\Phi : \ell_q \to \ell_p^*$ que a cada $y \in \ell_q$ hace corresponder $\Phi y \in \ell_p^*$ definido por (2) es un isomorfismo isométrico.

Proposición. Sean $p > 1$ y $q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Para cada $y \in \ell_q$ sea $\Phi y : \ell_p \to \mathbb{K}$ el funcional lineal definido por:

$$(\Phi y)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)y(n) \qquad (x \in \ell_p) \tag{2}$$

Se verifica entonces que $\Phi y \in \ell_p^*$, $\|\Phi y\| = \|y\|_q$, y la aplicación $\Phi : \ell_q \to \ell_p^*$ que a cada $y \in \ell_q$ hace corresponder $\Phi y \in \ell_p^*$ definido por (2) es un isomorfismo isométrico.

La relación de dualidad entre ℓ_p y ℓ_q se expresa $\ell_q \equiv \ell_p^*$. Observa que hay una simetría total, por lo que también $\ell_p \equiv \ell_q^*$.

Proposición. Sean $p > 1$ y $q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Para cada $y \in \ell_q$ sea $\Phi y : \ell_p \to \mathbb{K}$ el funcional lineal definido por:

$$(\Phi y)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)y(n) \qquad (x \in \ell_p) \tag{2}$$

Se verifica entonces que $\Phi y \in \ell_p^*$, $\|\Phi y\| = \|y\|_q$, y la aplicación $\Phi : \ell_q \to \ell_p^*$ que a cada $y \in \ell_q$ hace corresponder $\Phi y \in \ell_p^*$ definido por (2) es un isomorfismo isométrico.

La relación de dualidad entre ℓ_p y ℓ_q se expresa $\ell_q \equiv \ell_p^*$. Observa que hay una simetría total, por lo que también $\ell_p \equiv \ell_q^*$.Seguidamente nos ocupamos del caso $p = 1$, $q = \infty$.

Proposición. Sean $p > 1$ y $q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Para cada $y \in \ell_q$ sea $\Phi y : \ell_p \to \mathbb{K}$ el funcional lineal definido por:

$$(\Phi y)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)y(n) \qquad (x \in \ell_p) \tag{2}$$

Se verifica entonces que $\Phi y \in \ell_p^*$, $\|\Phi y\| = \|y\|_q$, y la aplicación $\Phi : \ell_q \to \ell_p^*$ que a cada $y \in \ell_q$ hace corresponder $\Phi y \in \ell_p^*$ definido por (2) es un isomorfismo isométrico.

La relación de dualidad entre ℓ_p y ℓ_q se expresa $\ell_q \equiv \ell_p^*$. Observa que hay una simetría total, por lo que también $\ell_p \equiv \ell_q^*$.Seguidamente nos ocupamos del caso $p = 1$, $q = \infty$.

Proposición. Para cada $y \in \ell_\infty$ sea $\Phi y : \ell_1 \to \mathbb{K}$ el funcional lineal definido por:

$$(\Phi y)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)y(n) \qquad (x \in \ell_1) \tag{3}$$

Se verifica entonces que $\Phi y \in \ell_1^*$, $\|\Phi y\| = \|y\|_\infty$, y la aplicación $\Phi : \ell_\infty \to \ell_1^*$ que a cada $y \in \ell_\infty$ hace corresponder $\Phi y \in \ell_1^*$ definido por (3) es un isomorfismo isométrico.

Proposición. Para cada $y \in \ell_1$ sea $\Phi y : c_0 \to \mathbb{K}$ el funcional lineal definido por:

$$(\Phi y)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)y(n) \qquad (x \in c_0) \tag{4}$$

Se verifica entonces que $\Phi y \in c_0^*$, $\|\Phi y\| = \|y\|_1$, y la aplicación $\Phi : \ell_1 \to c_0^*$ que a cada $y \in \ell_1$ hace corresponder $\Phi y \in c_0^*$ definido por (4) es un isomorfismo isométrico.

Proposición. Para cada $y \in \ell_1$ sea $\Phi y : c_0 \to \mathbb{K}$ el funcional lineal definido por:

$$(\Phi y)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)y(n) \qquad (x \in c_0) \tag{4}$$

Se verifica entonces que $\Phi y \in c_0^*$, $\|\Phi y\| = \|y\|_1$, y la aplicación $\Phi : \ell_1 \to c_0^*$ que a cada $y \in \ell_1$ hace corresponder $\Phi y \in c_0^*$ definido por (4) es un isomorfismo isométrico.

Teorema de representación de Riesz. Sea Ω un conjunto de medida positiva en $\mathbb{R}^N$ y sean $p > 1, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Para cada $g \in L_q(\Omega)$ definimos $\Phi g : L_p(\Omega) \to \mathbb{K}$ por

$$(\Phi g)(f) = \int_{\Omega} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \quad (f \in L_p(\Omega)) \tag{5}$$

Se verifica que $\Phi g \in L_p(\Omega)^*$, $\|\Phi g\| = \|g\|_q$ y la aplicación $\Phi : L_q(\Omega) \to L_p(\Omega)^*$ que a cada $g \in L_q(\Omega)$ hace corresponder $\Phi g \in L_p(\Omega)^*$ definido por 5 es un isomorfismo isométrico.

Proposición. Para cada $y \in \ell_1$ sea $\Phi y : c_0 \to \mathbb{K}$ el funcional lineal definido por:

$$(\Phi y)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n) y(n) \qquad (x \in c_0) \tag{4}$$

Se verifica entonces que $\Phi y \in c_0^*$, $\|\Phi y\| = \|y\|_1$, y la aplicación $\Phi : \ell_1 \to c_0^*$ que a cada $y \in \ell_1$ hace corresponder $\Phi y \in c_0^*$ definido por (4) es un isomorfismo isométrico.

Teorema de representación de Riesz. Sea Ω un conjunto de medida positiva en $\mathbb{R}^N$ y sean $p > 1, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Para cada $g \in L_q(\Omega)$ definimos $\Phi g : L_p(\Omega) \to \mathbb{K}$ por

$$(\Phi g)(f) = \int_{\Omega} f(x) g(x)\, \mathrm{d}x \quad (f \in L_p(\Omega)) \tag{5}$$

Se verifica que $\Phi g \in L_p(\Omega)^*$, $\|\Phi g\| = \|g\|_q$ y la aplicación $\Phi : L_q(\Omega) \to L_p(\Omega)^*$ que a cada $g \in L_q(\Omega)$ hace corresponder $\Phi g \in L_p(\Omega)^*$ definido por 5 es un isomorfismo isométrico.

La relación de dualidad entre $L_p(\Omega)$ y $L_q(\Omega)$ se expresa $L_q(\Omega) \equiv L_p(\Omega)^*$. Observa que hay una simetría total, por lo que también $L_p(\Omega) \equiv L_q(\Omega)^*$.

Un tratamiento análogo puede hacerse cuando $p = 1$ y $q = \infty$ obteniendo que $\Phi : L_\infty(\Omega) \to L_1(\Omega)^*$ es un isomorfismo isométrico, es decir, $L_\infty(\Omega) \equiv L_1(\Omega)^*$.

Un tratamiento análogo puede hacerse cuando $p = 1$ y $q = \infty$ obteniendo que $\Phi : L_\infty(\Omega) \to L_1(\Omega)^*$ es un isomorfismo isométrico, es decir, $L_\infty(\Omega) \equiv L_1(\Omega)^*$.

Cuando $p = \infty$ y $q = 1$ definiendo igual que antes $\Phi : L_1(\Omega) \to L_\infty(\Omega)^*$, resulta que Φ es una isometría lineal pero no es sobreyectiva.

Un tratamiento análogo puede hacerse cuando $p = 1$ y $q = \infty$ obteniendo que $\Phi : L_\infty(\Omega) \to L_1(\Omega)^*$ es un isomorfismo isométrico, es decir, $L_\infty(\Omega) \equiv L_1(\Omega)^*$.

Cuando $p = \infty$ y $q = 1$ definiendo igual que antes $\Phi : L_1(\Omega) \to L_\infty(\Omega)^*$, resulta que Φ es una isometría lineal pero no es sobreyectiva.

Teorema. Para cada $g \in L_1([a,b])$ definamos $\Psi g : C[a,b] \to \mathbb{K}$ por

$$(\Psi g)(x) = \int_a^b x(t)g(t)\,\mathrm{d}t \qquad (x \in C[a,b])$$

Se verifica entonces que $\Psi g \in C[a,b]^*$ y $\|\Psi g\| = \|g\|_1$. Por tanto la aplicación así definida $\Psi : L_1([a,b]) \to C[a,b]^*$ es una isometría lineal lo que permite identificar a $L_1([a,b])$ con un subespacio cerrado de $C[a,b]^*$.

Un tratamiento análogo puede hacerse cuando $p = 1$ y $q = \infty$ obteniendo que $\Phi : L_\infty(\Omega) \to L_1(\Omega)^*$ es un isomorfismo isométrico, es decir, $L_\infty(\Omega) \equiv L_1(\Omega)^*$.

Cuando $p = \infty$ y $q = 1$ definiendo igual que antes $\Phi : L_1(\Omega) \to L_\infty(\Omega)^*$, resulta que Φ es una isometría lineal pero no es sobreyectiva.

Teorema. Para cada $g \in L_1([a,b])$ definamos $\Psi g : C[a,b] \to \mathbb{K}$ por

$$(\Psi g)(x) = \int_a^b x(t)g(t)\,\mathrm{d}t \qquad (x \in C[a,b])$$

Se verifica entonces que $\Psi g \in C[a,b]^*$ y $\|\Psi g\| = \|g\|_1$. Por tanto la aplicación así definida $\Psi : L_1([a,b]) \to C[a,b]^*$ es una isometría lineal lo que permite identificar a $L_1([a,b])$ con un subespacio cerrado de $C[a,b]^*$.

No se agota aquí la descripción del dual de $C[a,b]$, otros elementos del dual son los funcionales de evaluación: fijado $t \in [a,b]$ definimos $\delta_t : C[a,b] \to \mathbb{K}$ por $\delta_t(x) = x(t)$ para todo $x \in C[a,b]$.

Un tratamiento análogo puede hacerse cuando $p = 1$ y $q = \infty$ obteniendo que $\Phi : L_\infty(\Omega) \to L_1(\Omega)^*$ es un isomorfismo isométrico, es decir, $L_\infty(\Omega) \equiv L_1(\Omega)^*$.

Cuando $p = \infty$ y $q = 1$ definiendo igual que antes $\Phi : L_1(\Omega) \to L_\infty(\Omega)^*$, resulta que Φ es una isometría lineal pero no es sobreyectiva.

Teorema. Para cada $g \in L_1([a,b])$ definamos $\Psi g : C[a,b] \to \mathbb{K}$ por

$$(\Psi g)(x) = \int_a^b x(t)g(t)\,\mathrm{d}t \qquad (x \in C[a,b])$$

Se verifica entonces que $\Psi g \in C[a,b]^*$ y $\|\Psi g\| = \|g\|_1$. Por tanto la aplicación así definida $\Psi : L_1([a,b]) \to C[a,b]^*$ es una isometría lineal lo que permite identificar a $L_1([a,b])$ con un subespacio cerrado de $C[a,b]^*$.

No se agota aquí la descripción del dual de $C[a,b]$, otros elementos del dual son los funcionales de evaluación: fijado $t \in [a,b]$ definimos $\delta_t : C[a,b] \to \mathbb{K}$ por $\delta_t(x) = x(t)$ para todo $x \in C[a,b]$.Es inmediato que $\delta_t \in C[a,b]^*$ y $\|\delta_t\| = 1$. A este funcional se le suele llamar *delta de Dirac* en el punto t.

Un tratamiento análogo puede hacerse cuando $p = 1$ y $q = \infty$ obteniendo que $\Phi : L_\infty(\Omega) \to L_1(\Omega)^*$ es un isomorfismo isométrico, es decir, $L_\infty(\Omega) \equiv L_1(\Omega)^*$.

Cuando $p = \infty$ y $q = 1$ definiendo igual que antes $\Phi : L_1(\Omega) \to L_\infty(\Omega)^*$, resulta que Φ es una isometría lineal pero no es sobreyectiva.

Teorema. Para cada $g \in L_1([a,b])$ definamos $\Psi g : C[a,b] \to \mathbb{K}$ por

$$(\Psi g)(x) = \int_a^b x(t)g(t)\,\mathrm{d}t \qquad (x \in C[a,b])$$

Se verifica entonces que $\Psi g \in C[a,b]^*$ y $\|\Psi g\| = \|g\|_1$. Por tanto la aplicación así definida $\Psi : L_1([a,b]) \to C[a,b]^*$ es una isometría lineal lo que permite identificar a $L_1([a,b])$ con un subespacio cerrado de $C[a,b]^*$.

No se agota aquí la descripción del dual de $C[a,b]$, otros elementos del dual son los funcionales de evaluación: fijado $t \in [a,b]$ definimos $\delta_t : C[a,b] \to \mathbb{K}$ por $\delta_t(x) = x(t)$ para todo $x \in C[a,b]$.Es inmediato que $\delta_t \in C[a,b]^*$ y $\|\delta_t\| = 1$. A este funcional se le suele llamar *delta de Dirac* en el punto t.Se comprueba fácilmente que si $s \neq t$ son puntos en $[a,b]$ entonces $\|\delta_t - \delta_s\| = 2$ de donde se deduce que el espacio dual de $C[a,b]$ no es separable.